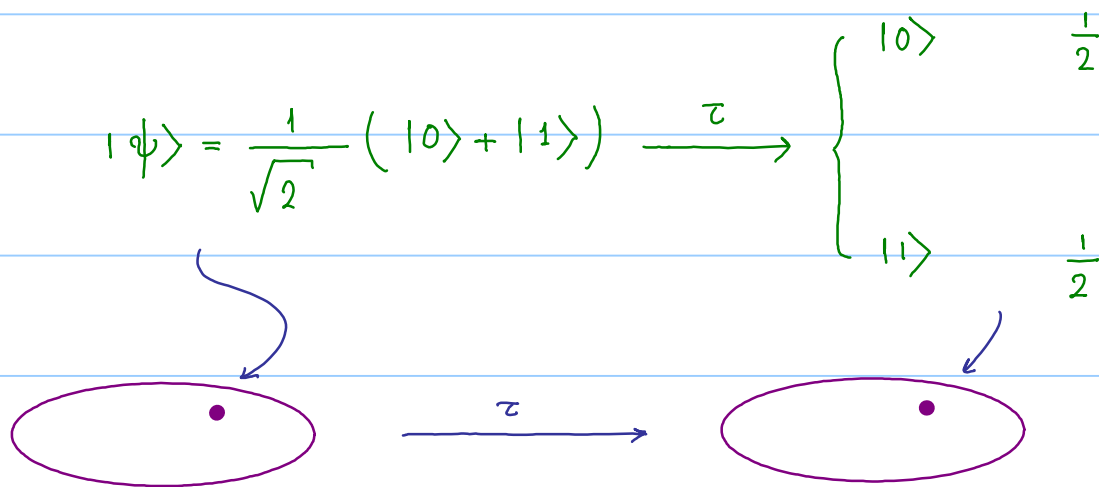


تصحیح خطای کوانتومی

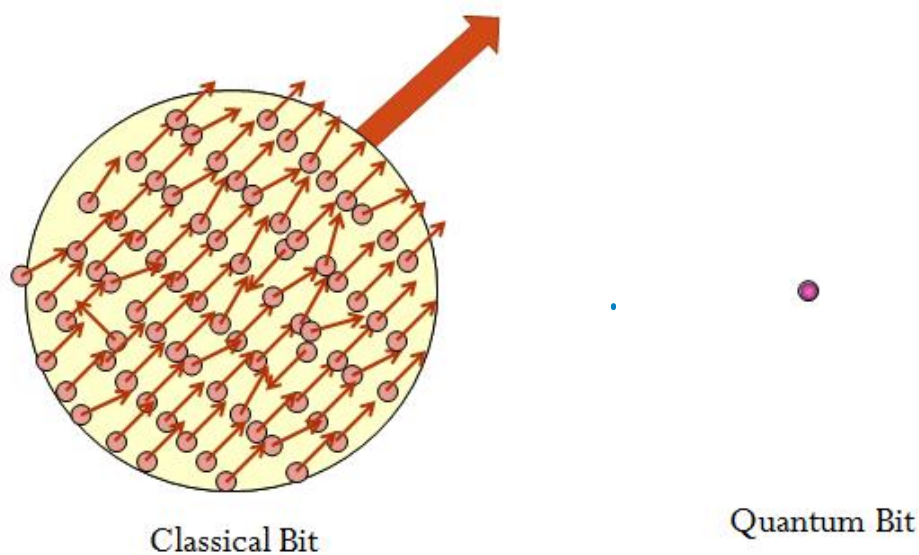
Note Title

12/20/2009

آیا امروزه رایش کوانتومی ممکن است؟

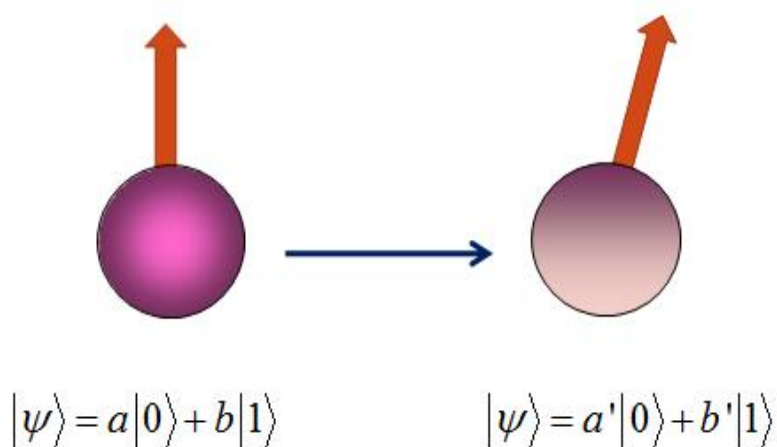


1 - کیوبیت ها بسیار شکننده اند



8

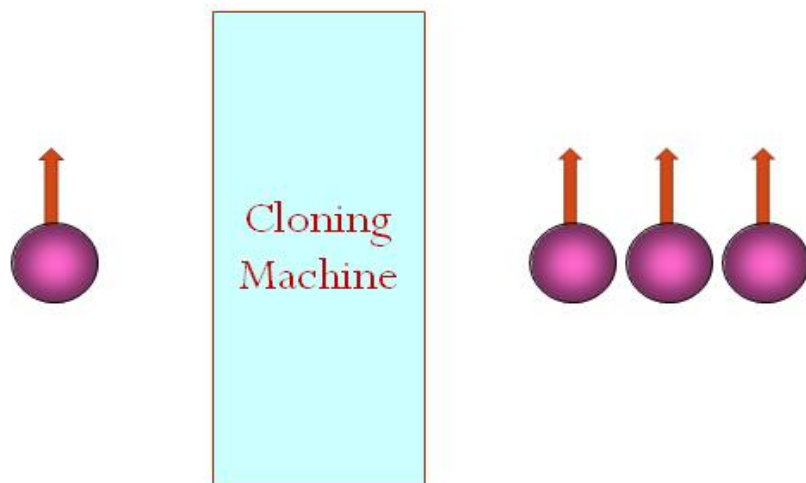
2 - خطاها پیوسته هستند.



9

$0 \longrightarrow 000$ خط
 $1 \longrightarrow 111$

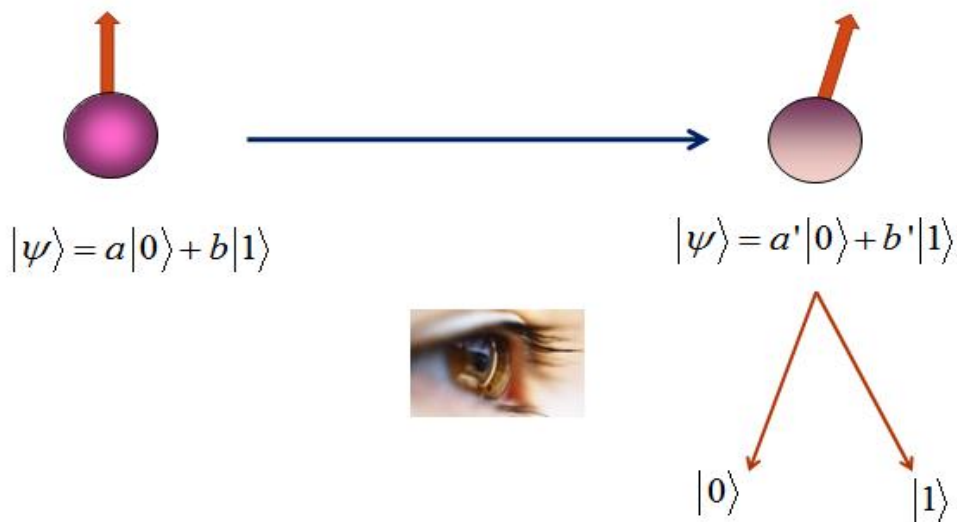
3 - امکان تکثیر کیوبیت ها نیست



10

$|\psi\rangle|0\rangle|b\rangle \not\rightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle|b'\rangle$

4 - نمی توان کیوبیت ها را مشاهده کرد.



11

④ که در تصحیح کننده خطا کوانتومی

1 - خطا را متعاقباً می‌سنجند.

$$U = \alpha_0 I + \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$$

$$|q\rangle \rightarrow \alpha_0 I|q\rangle + \alpha_1 X|q\rangle + \alpha_2 Y|q\rangle + \alpha_3 Z|q\rangle$$



یک جای کار عیب دارد.

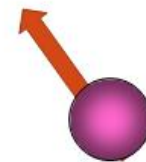
$$|q\rangle|e\rangle \rightarrow I|q\rangle|e_0\rangle + X|q\rangle|e_1\rangle + Y|q\rangle|e_2\rangle + Z|q\rangle|e_3\rangle$$

این حالت ها متعامد نیستند !!

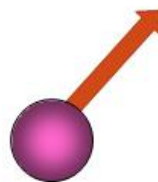
15



$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$



$$Z|q\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle$$



$$X|q\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$$

16

Quantum Code

$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \longrightarrow |q\rangle_c = a|00\rangle + b|11\rangle.$$



$$|q\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$$



$$X_1|q\rangle = a|10\rangle + b|01\rangle$$



$$X_2|q\rangle = a|01\rangle + b|10\rangle$$



ما می توانیم کد هایی درست کنیم
که همه خطاها را تشخیص دهد.

$$|q\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle$$

$$X_1|q\rangle = a|100\rangle + b|011\rangle$$

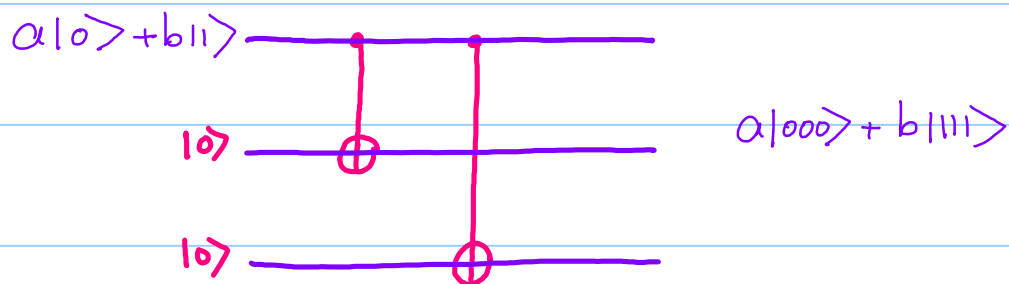
$$X_2|q\rangle = a|010\rangle + b|101\rangle$$

$$X_3|q\rangle = a|001\rangle + b|110\rangle$$

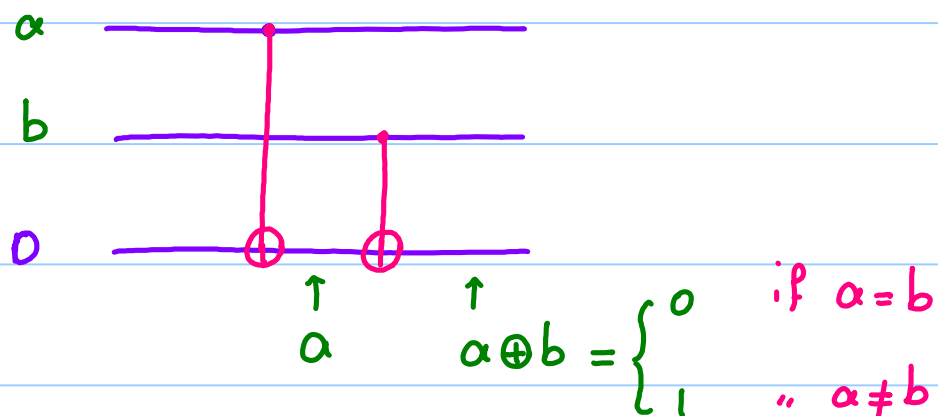
خطا

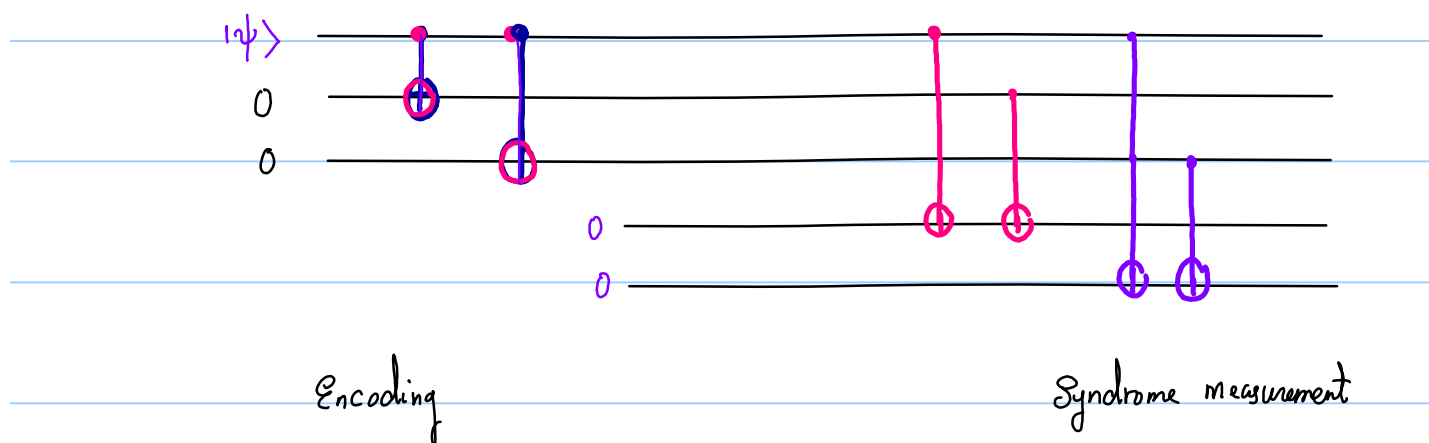
	Z_1, Z_2	Z_1, Z_3
$I q\rangle = \alpha 000\rangle + b 111\rangle$	1	1
$X_1 q\rangle = \alpha 100\rangle + b 011\rangle$	-1	-1
$X_2 q\rangle = \alpha 010\rangle + b 101\rangle$	-1	1
$X_3 q\rangle = \alpha 001\rangle + b 110\rangle$	1	-1

• Encoding Circuit



• Measurement Circuit





$$Z_1 Z_2 |\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad Z_1 Z_3 |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

میکم تفکر!

	I	X ₁	X ₂	X ₃
Z ₁ Z ₂	+	-	-	+
Z ₁ Z ₃	+	-	+	-

$$S = \{ I, Z_1 Z_2, Z_1 Z_3, Z_2 Z_3 \} = \begin{cases} \langle Z_1 Z_2, Z_1 Z_3 \rangle \\ \text{or} \\ \langle Z_1 Z_2, Z_2 Z_3 \rangle \end{cases}$$

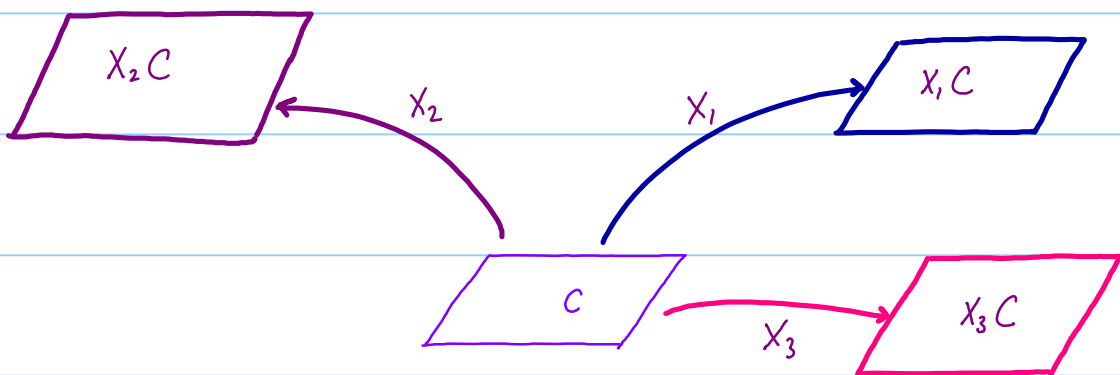
$|\psi\rangle$ is stabilized by S .

↑
generators

$$\langle \psi | X_1 X_2 | \psi \rangle = 0$$

$$\langle \psi | X_1 X_3 | \psi \rangle = 0$$

$$\langle \psi | X_2 X_3 | \psi \rangle = 0.$$



آ اینا به خطره تصحیح نزنه.

$$|q\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle$$

Z_1

$$|q\rangle = a|000\rangle - b|111\rangle.$$

چیزه برتران نه زرفت خطره phase flip تصحیح کنه؟

$$Z|+\rangle = |+\rangle, \quad Z|-\rangle = -|-\rangle.$$

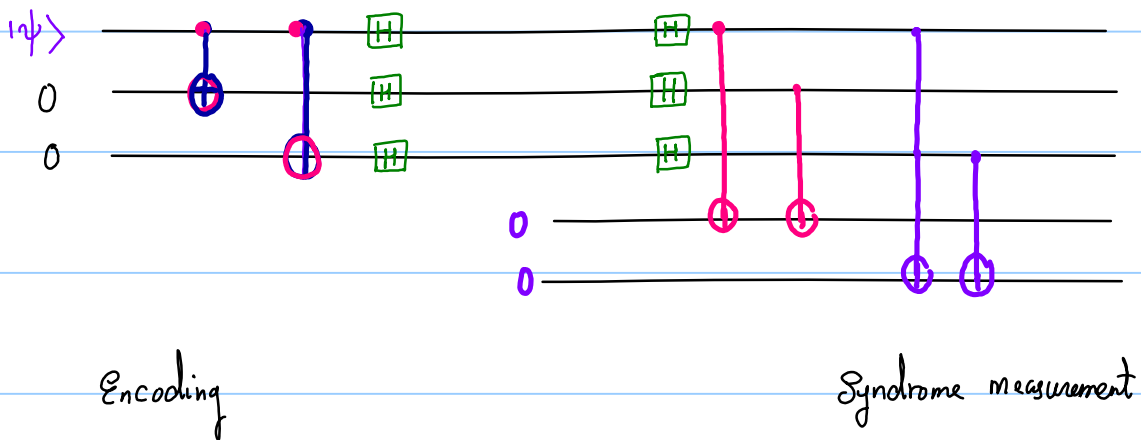
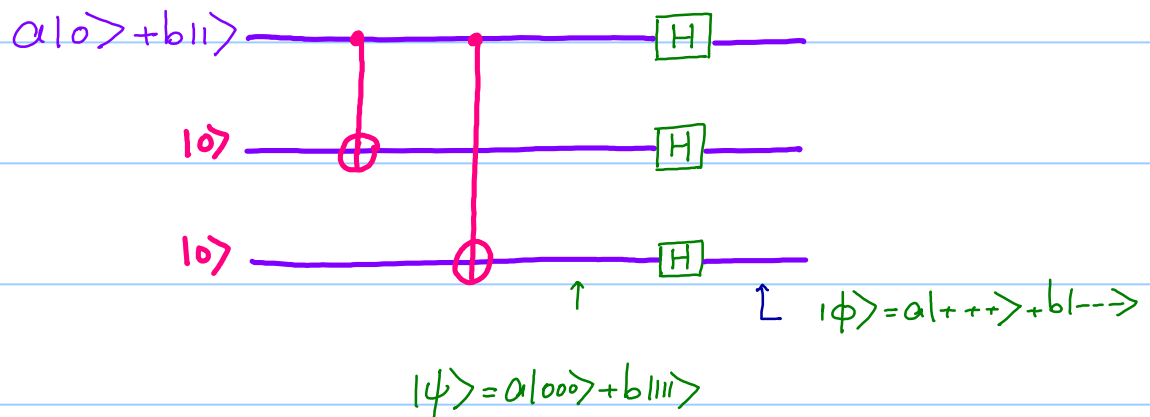
$$|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow |-- \rangle$$

$$|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \longrightarrow |\psi\rangle = a|+++ \rangle + b|-- \rangle.$$

$$H X H = Z, \quad H Z H = X$$

• Encoding Circuit

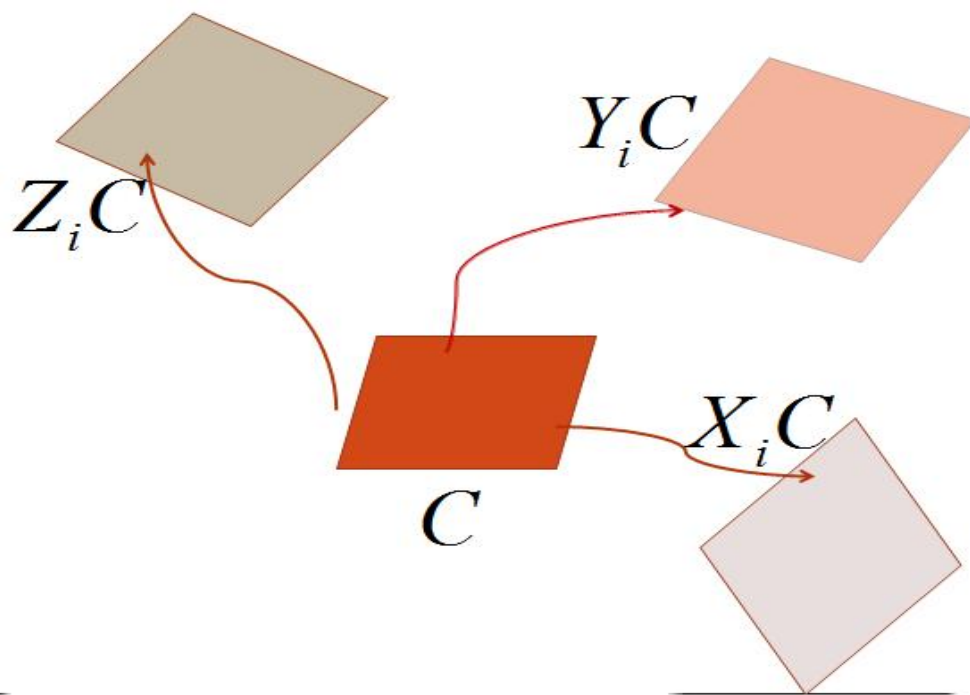


Shor Code

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle) (|000\rangle + |111\rangle) (|000\rangle + |111\rangle)$$

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (|000\rangle - |111\rangle) (|000\rangle - |111\rangle) (|000\rangle - |111\rangle)$$

$$\mathcal{E} = \{ X_1, \dots, X_9 ; Z_1, \dots, Z_9 ; Y_1, \dots, Y_9 \}$$



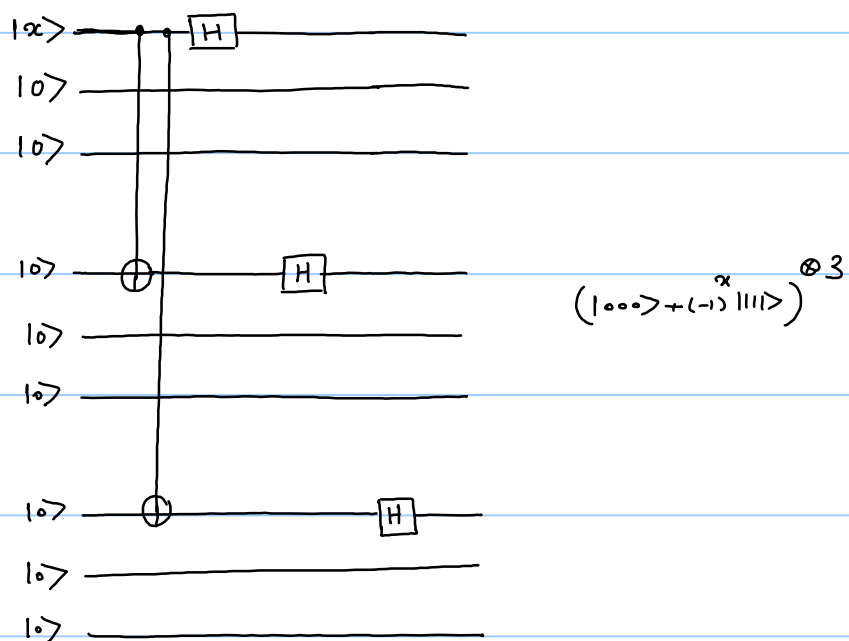
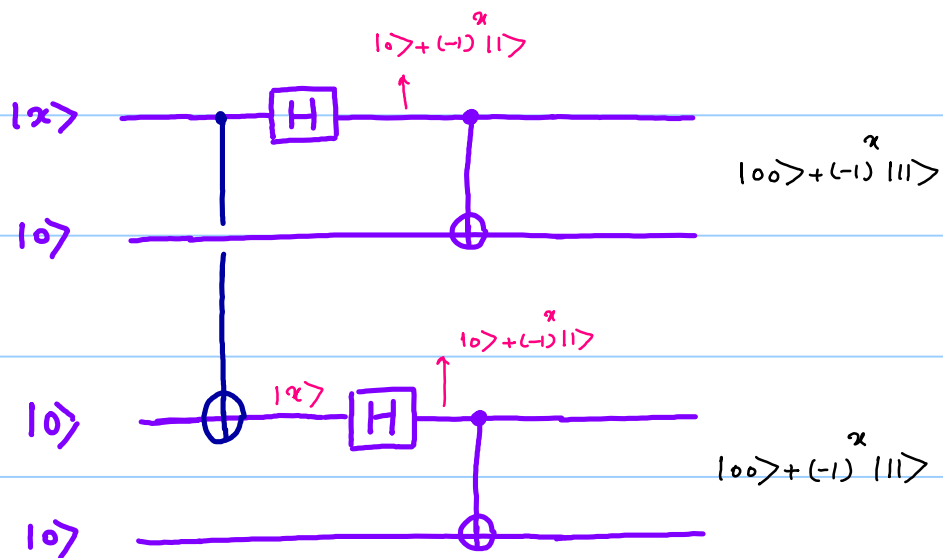
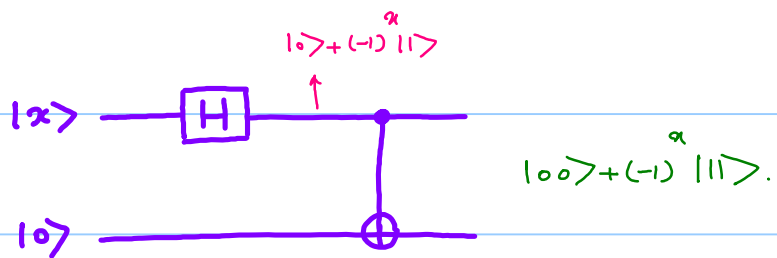
22

generators of $\mathcal{S}$ for Shor Code:

$$\mathcal{S} = \left\langle \begin{array}{l} Z_1 Z_2, Z_1 Z_3 ; Z_4 Z_5, Z_4 Z_6 ; Z_7 Z_8, Z_7 Z_9, \\ X_I X_{II} ; X_I X_{III} \end{array} \right\rangle$$

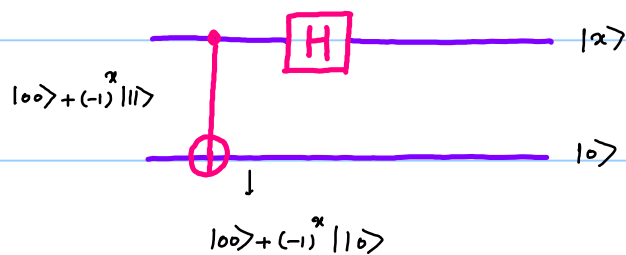
$$\forall s \in \mathcal{S} \quad s|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

Encoding Circuit

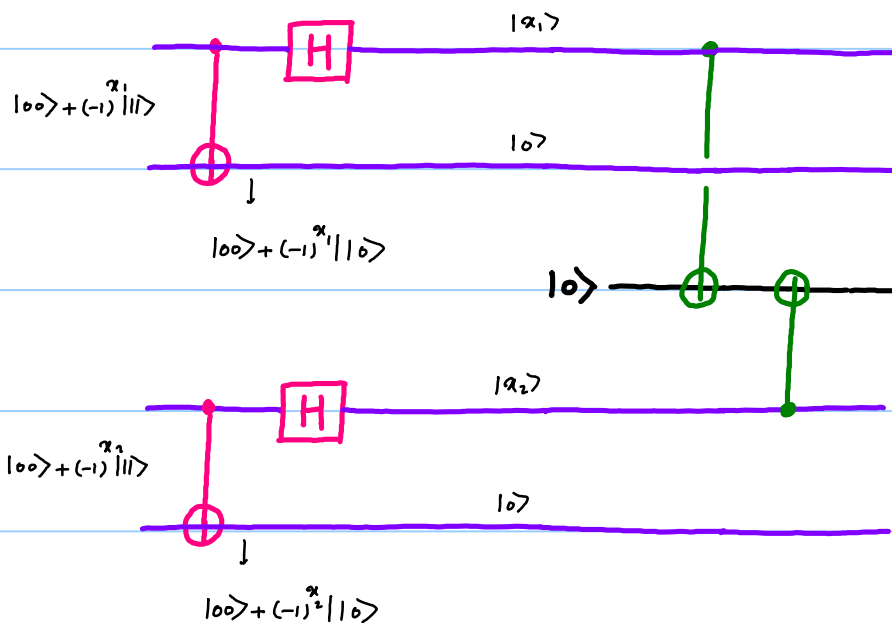


Syndrome Measurement

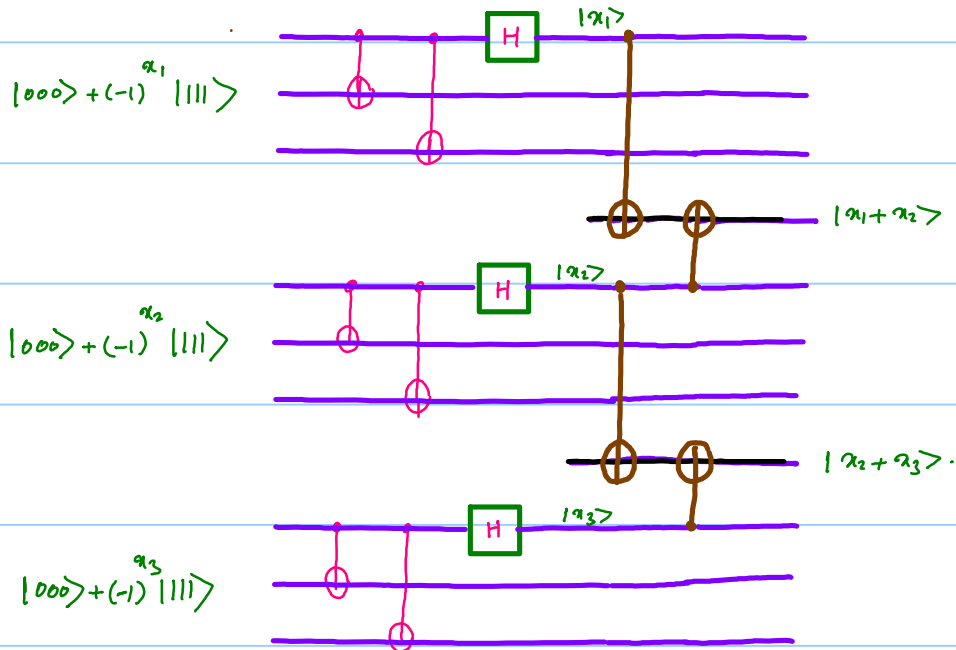
- مثال ساده: میخواهم تشخیص دهم که آیا حالت $|00\rangle + |11\rangle$ به هر اندازه ای که باشد، حالت $|00\rangle - |11\rangle$ مدار اندازه گیری برتر است:



- مخرج پنجم به آید دوباره $|00\rangle + (-1)^{\alpha_1} |11\rangle$ ، $|00\rangle + (-1)^{\alpha_2} |11\rangle$ در دست نه به شش، و چهارده شش هم هستند یا نه. مدار اندازه گیری برتر است:

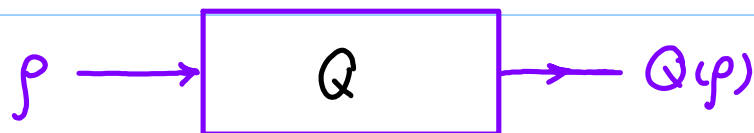


● با ۷ بیت مثل ۶ ترانزیت مدار اندازه گیری را می توانیم بسازیم
 $X_I X_{II}$, $X_{II} X_{III}$ در کد شتر طاقی



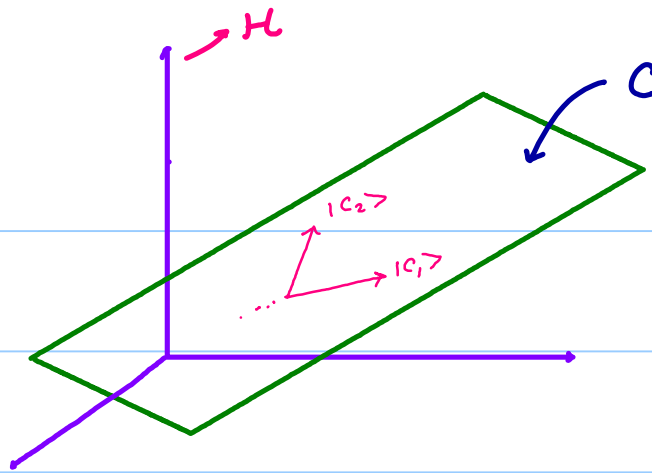
قضیه داسکی تصحیح خطای کوانتومی

$\mathcal{H}$ = a Hilbert Space $\mathcal{Q}$ = a quantum channel acting on $\mathcal{H}$.



$$Q(\rho) = \sum_k p_k E_k \rho E_k^\dagger$$

errors.



Basis of $C = \{|c_1\rangle, |c_2\rangle, \dots, |c_k\rangle\}$

توضیح: C یک فضای هیلبرت است که خطی است و $Q = 1$ ، در نقطه Q

$$\forall E_k, E_l \quad \forall i, j$$

$$\langle c_i | E_k^\dagger E_l | c_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

$$\langle c_i | E_k^\dagger E_l | c_i \rangle = \alpha_{kl} \quad \forall i$$

Complex conjugation: $\rightarrow$

$$\langle c_i | E_l^\dagger E_k | c_i \rangle = \alpha_{kl}^*$$

$\rightarrow \alpha$ is a Hermitian Matrix.

$$\Omega^\dagger \alpha \Omega = D$$

تقریبی $\leftarrow$

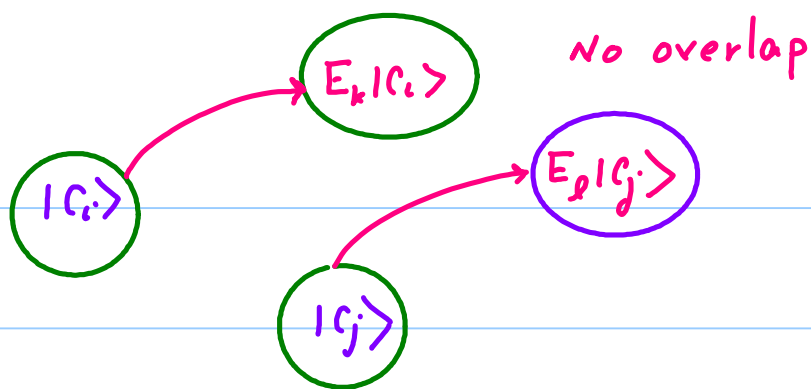
Define: $F_\mu := \Omega_{\mu k} E_k \Rightarrow F_\mu^\dagger = \Omega_{\mu k}^* E_k^\dagger$

$$\rightarrow \langle c_i | F_\mu^\dagger F_\nu | c_i \rangle = \langle c_i | \Omega_{\mu k}^* \Omega_{\nu l} E_k^\dagger E_l | c_i \rangle$$

$$= \Omega_{\mu k}^* \Omega_{\nu l} \alpha_{kl} = (\Omega^\dagger \alpha \Omega)_{\mu\nu} = \omega_\mu \delta_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \langle c_i | F_\mu^\dagger F_\nu | c_i \rangle = \omega_\mu \delta_{\mu\nu}$$

$$\text{if } \omega_\mu = 0 \Rightarrow F_\mu | c_i \rangle = 0$$



دلیل تمیز

Shor Code $|0\rangle_E = (|000\rangle + |111\rangle)^{\otimes 3}$

$$|1\rangle_E = (|000\rangle - |111\rangle)^{\otimes 3}$$

$$Z_1|0\rangle_E = Z_2|0\rangle_E = Z_3|0\rangle_E$$

Z_1, Z_2, Z_3 هر سه حالت $|0\rangle_E$ را تغییر نمی‌دهند:

$$Z_i|0\rangle_E = (|000\rangle - |111\rangle) \otimes (|000\rangle + |111\rangle) \otimes (|000\rangle + |111\rangle)$$

از هر سه خط در حالت $|0\rangle_E$ یک بیت است.

Z_1, Z_2, Z_3 هر سه حالت $|1\rangle_E$ را تغییر نمی‌دهند:

$$Z_i|1\rangle_E = (|000\rangle + |111\rangle) \otimes (|000\rangle - |111\rangle) \otimes (|000\rangle - |111\rangle)$$

از هر سه خط در حالت $|1\rangle_E$ یک بیت است.

با اندازه گیری $X_I X_{II}$ و $X_{II} X_{III}$ می‌توانیم تشخیص دهیم حالت $|0\rangle_E$ و $|1\rangle_E$ را.

این مترادف خطای تصحیح دارد و آن را تصحیح می‌کند.

5 qubit Code

$$S_1 = ZZXXX$$

$$S_2 = XZZXX$$

$$S_3 = XXZZX$$

$$S_4 = XXXZZ$$

$$\rightarrow [S_1, S_2, S_3, S_4] = 0$$

$$|C| = 2$$

Syndromes.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
S_1	-	-	+	+	+
S_2	+	-	-	+	+
S_3	+	+	-	-	+
S_4	+	+	+	-	-

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
S_1	+	+	-	-	-
S_2	-	+	+	-	-
S_3	-	-	+	+	-
S_4	-	-	-	+	+

This is not a

Good Code!

$(X_2 \text{ or } Z_4)$ have the same Syndrome.

$(X_4 \text{ or } Z_2)$ " " " .

The 5-qubit Code.

$$S_1 = XXZIZ$$

$$S_2 = ZXXZI$$

$$S_3 = IZXXZ$$

$$S_4 = ZIZXX$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
S_1	0	0	1	0	1
S_2	1	0	0	1	0
S_3	0	1	0	0	1
S_4	1	0	1	0	0

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
S_1	1	1	0	0	0
S_2	0	1	1	0	0
S_3	0	0	1	1	0
S_4	0	0	0	1	1

the encoded qubits:

$$S_1 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_3 + i_5} |\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5\rangle$$

$$S_2 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_1 + i_4} |i_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3 i_4 i_5\rangle$$

$$S_3 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_3 + i_4} |i_1 i_2 \bar{i}_3 \bar{i}_4 i_5\rangle$$

$$S_4 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_4 + i_5} |i_1 i_2 i_3 \bar{i}_4 \bar{i}_5\rangle$$

$$S_1 = XXZIZ$$

$$S_2 = ZXXZI$$

$$S_3 = IZXXZ$$

$$S_4 = ZIZXX$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle$$

$$\begin{aligned} S_1 |\psi\rangle &= \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} (-1)^{i_3 + i_5} |\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5\rangle \\ &= \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5} (-1)^{i_3 + i_5} |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} &= (-1)^{i_3 + i_5} a_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5} \\ a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} &= (-1)^{i_1 + i_4} a_{i_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3 i_4 i_5} \\ a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} &= (-1)^{i_3 + i_4} a_{i_1 i_2 \bar{i}_3 \bar{i}_4 i_5} \\ a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} &= (-1)^{i_4 + i_5} a_{i_1 i_2 i_3 \bar{i}_4 \bar{i}_5} \end{aligned}$$

تمرین: گفت این نه، کبریت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ به چه حالتی نه می‌شود؟

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌گویم که دیگر لازم نیست

$$S_1 = X_4 X_5 X_6 X_7$$

$$S_4 = Z_4 Z_5 Z_6 Z_7$$

$$S_2 = X_2 X_3 X_6 X_7$$

$$S_5 = Z_2 Z_3 Z_6 Z_7$$

$$S_3 = X_1 X_3 X_5 X_7$$

$$S_6 = Z_1 Z_3 Z_5 Z_7$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
S_1	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	0	0	0	0	0	0
S_3	0	0	0	0	0	0	0
S_4	0	0	0	1	1	1	1
S_5	0	1	1	0	0	1	1
S_6	1	0	1	0	1	0	1

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7
S_1	0	0	0	1	1	1	1
S_2	0	1	1	0	0	1	1
S_3	1	0	1	0	1	0	1
S_4	0	0	0	0	0	0	0
S_5	0	0	0	0	0	0	0
S_6	0	0	0	0	0	0	0

CSS Codes.

Calderbank-Shor-Steane Codes.

• یادآور در خطی

C : $\begin{cases} \text{generator } G \\ \text{parity check } H \end{cases}$

$$x \in C \rightarrow x = uG \leftrightarrow xH^T = 0$$

$C^\perp$: $\begin{cases} \text{generator } H \\ \text{parity check } G \end{cases}$

$$y \in C^\perp \rightarrow y = vH \leftrightarrow yG^T = 0$$

• (1)

$$\sum_{x \in F_2^n} (-1)^{x \cdot y} = 2^n \delta_{y,0}.$$

• (1)

$$\sum_{\omega \in C} (-1)^{\omega \cdot y} = 2^n \delta_{y \in C^\perp}$$

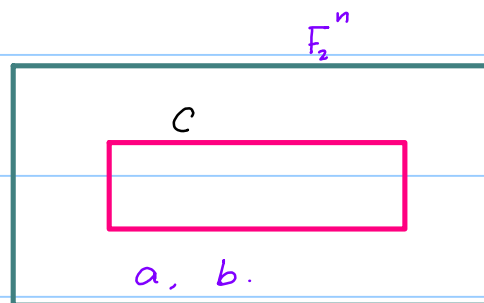
$$\sum_{w \in C} (-1)^{w \cdot y} = \sum_{w \in C} (-1)^{w \cdot y^T} \quad \bullet \text{ اثبات:}$$

w سطری، y^T ستونی است.

$$= \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{\widetilde{x} G y^T} = 2^n \delta_{G y^T, 0} = 2^n \delta_{y \in C^\perp}.$$

let $a, b \in F_2^n$ then

$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{|C|}} \sum_{c \in C} (-1)^{a \cdot c} |c+b\rangle$$



$$\text{then } H_{2^n} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|C|}} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{c \in C} \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{x \cdot (c+b)} (-1)^{a \cdot c} |x\rangle$$

$$\text{پس داریم:} = \frac{1}{\sqrt{2^n |C|}} \sum_{x \in F_2^n} 2^n \delta_{x+a \in C^\perp} (-1)^{x \cdot b} |x\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2^n}{|C|}} \sum_{c' \in C^\perp} (-1)^{(c'+a) \cdot b} |c'+a\rangle$$

$$|C||C^\perp| = 2^n \quad \leftarrow \quad |C^\perp| = 2^{n-k} \quad , \quad |C| = 2^k \quad \text{سی باقی}$$

← باقی

$$H_{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{|C|}} \sum_{c \in C} (-1)^{a \cdot c} |b+c\rangle \right) = \frac{(-1)^{a \cdot b}}{\sqrt{|C^\perp|}} \sum_{c \in C^\perp} (-1)^{b \cdot c} |a+c\rangle$$